PART2　漸化式

2　［1］　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4^n+2n-3$　　(4)　$a_1=-2$，$4a_{n+1}=5a_n+4$

［2］　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$

Point Pickup

［1］　$a_{n+1}=a_n+d$　…… 公差 d の等差数列

$a_{n+1}=ra_n$ …… 公比 r の等比数列

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ …… $f(n)$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項

$a_{n+1}=pa_n+q$ …… $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は等比数列

［2］　(1)　両辺の逆数をとる。

(2)　$f(n+1)a_{n+1}=pf(n)a_n$ の形に変形する。

第３講　PART2　確認問題

次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-2$

$$a_n=\boxed{アイ}n+\boxed{ウ}$$

2　$a_1=\dfrac{1}{4},\ 2a_{n+1}+a_n=0$

$$a_n=\left(\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\right)^{\boxed{キ}}$$

[キ の選択肢]

① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

3　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^{n+1}+4n+4$

$$a_n=2^{\boxed{ク}}+\boxed{ケ}n^2+\boxed{コ}n-\boxed{サ}$$

[ク の選択肢]

① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

4　$a_1=4,\ 3a_{n+1}-4a_n=1$

$$a_n=\boxed{シ}\cdot\left(\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)^{n-1}-\boxed{ソ}$$

5 $a_1=\frac{1}{7}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{8a_n-3}$

$$a_n=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}\cdot\left(\boxed{ツテ}\right)^{n-1}+\boxed{ト}}$$

6 $a_1=3$, $3na_{n+1}=(n+1)a_n$

$$a_n=n\cdot\left(\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\right)^{\boxed{ヌ}}$$

[ヌ の選択肢]

① $n-2$　② $n-1$　③ n　④ $n+1$

【MEMO】

PART2　漸化式

2　[1]　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4^n+2n-3$　　(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

[2]　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

[1]　(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+6$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項1，公差6の等差数列である。

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項2，公比 -2 の等比数列である。

よって　$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$

(3)　$a_{n+1}-a_n=4^n+2n-3$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は 4^n+2n-3

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(4^k+2k-3\right)$$

$$=1+\frac{4\left(4^{n-1}-1\right)}{4-1}+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3(n-1)=\frac{1}{3}\cdot 4^n+n^2-4n+\frac{8}{3}$$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot 4^n+n^2-4n+\dfrac{8}{3}$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n+1$ より　$a_{n+1}+4=\dfrac{5}{4}(a_n+4)$

よって，数列 $\{a_n+4\}$ は，初項 $a_1+4=2$，公比 $\dfrac{5}{4}$ の等比数列である。

したがって　$a_n+4=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$ より　$a_n=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}-4$

[2]　(1)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ …… ①において，$a_{n+1}=0$ であると仮定すると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ となる n があると仮定すると

$$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$$

となり，$a_1=2$ であることに矛盾する。

よって，すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ である。

①の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+4$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+4$，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}+2=3(b_n+2),\ b_1+2=\frac{5}{2}$$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1} \qquad \text{よって} \quad b_n=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-2=\frac{5\cdot3^{n-1}-4}{2}$$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}$

(2)　$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\frac{a_n}{n}$$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$

よって　$b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$ より　$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$　　したがって　$a_n=n\cdot2^{n-1}$

(別解)

$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ より　$a_{n+1}=2\cdot\dfrac{n+1}{n}a_n$

よって　$n \geqq 2$ のとき　$a_n=2\cdot\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$

$n \geqq 3$ のとき　$a_{n-1}=2\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

よって　$a_n=2^2\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

これを繰り返すと，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=2^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}a_1=2^{n-1}\cdot\frac{n}{1}\cdot1=n\cdot2^{n-1}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。したがって　$a_n=n\cdot2^{n-1}$

第3講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：4

[解説]

$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-2$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 -2 の等差数列である。[A]

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot(-2)=\boldsymbol{-2n+4}$

> [A]　$a_{n+1}=a_n+d$
> 公差 d の等差数列

2

[正解] エオ：-1，カ：2，キ：③

[解説]

$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。[B]

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

> [B]　$a_{n+1}=ra_n$
> 公比 r の等比数列

3

[正解] ク：③，ケ：2，コ：2，サ：6

[解説]

$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}+4n+4$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は

$$b_n=2^{n+1}+4n+4$$ [C]

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{k+1}+4k+4\right)$$
$$=2+\frac{4\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+4(n-1)$$
$$=2^{n+1}+2n^2+2n-6$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\boldsymbol{2^{n+1}+2n^2+2n-6}$

> [C]　$a_{n+1}=a_n+f(n)$
> $b_n=f(n)$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項

4 **[正解]** シ：5，ス：4，セ：3，ソ：1

[解説]

$a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n+\frac{1}{3}$ より

$$a_{n+1}+1=\frac{4}{3}(a_n+1)$$ [D]

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=5$，公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列である。

したがって　$a_n+1=5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n=\mathbf{5}\cdot\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}\mathbf{-1}$

[D]　$a_{n+1}=pa_n+q$
$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すると，
数列 $\{a_n-\alpha\}$ は等比数列

5 **[正解]** タ：1，チ：5，ツテ：-3，ト：2

[解説]

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{8a_n-3}$ ……①　において，$a_{n+1}=0$ であると仮定すると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ となる n があると仮定すると，

$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$ となり，

$a_1=\dfrac{1}{7}$ であることに矛盾する。

よって，すべての自然数 n について，$a_n\neq 0$ である。

①の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{8a_n-3}{a_n}=-\frac{3}{a_n}+8$$ [E]

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=-3b_n+8,\ b_1=\frac{1}{a_1}=7$$

ゆえに

$$b_{n+1}-2=-3(b_n-2),\ b_1-2=7-2=5$$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 5，公比 -3 の等比数列であるから

$$b_n-2=5\cdot(-3)^{n-1}$$

ゆえに　$b_n=5\cdot(-3)^{n-1}+2$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5\cdot(-3)^{n-1}+2}}$

[E]　両辺の逆数をとり，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくことで，b_n の漸化式から一般項を求める。

6 [正解] ナ：1，ニ：3，ヌ：①

[解説]

$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$3\cdot\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$$

すなわち　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n}{n}$ [F]

[F]　$f(n+1)a_{n+1}=pf(n)a_n$ の形に変形する。

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$，　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=3$

よって　$b_n=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

ゆえに　$\dfrac{a_n}{n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}}$

（別解）

$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ より　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n+1}{n}a_n$

よって

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$

$n\geqq 3$ のとき　$a_{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

よって　$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

これを繰り返すと，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}a_1$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{1}\cdot 3=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}}$